Conv. Extraordinaria
8 de Julio de 2014

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

APELLIDOS:
NOMBRE:

1. Se consideran los subespacios S y T de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

   S es el subespacio generado por el conjunto de vectores $\{(1,0,2,-1),(1,1,3,0),(0,1,1,1)\}$,

   T es el subespacio definido por las ecuaciones implícitas $\begin{cases} 3x-3y+z-t=0 \\ x-y+t=0 \\ x-y+z-3t=0. \end{cases}$

   (a) (**0.5 puntos**) Averiguar si el vector $(1,2,4,1)$ pertenece al subespacio S.

   (b) (**0.5 puntos**) Hallar las dimensiones de los subespacios S y T.

   (c) (**0.5 puntos**) Hallar una base y la dimensión del subespacio $S\cap T$.

   (d) (**0.5 puntos**) Halla la dimensión del subespacio $S+T$.

2. (**2 puntos**) Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\forall (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$f(x,y,z,t)=(x+2y+t,y-z+2t,x+4y-2z+5t).$$

   Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de la Imagen y del Núcleo de f, explicando por qué razón se verifica que dim(Im(f)) + dim(Ker(f))=4.

3. (**2 puntos**) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   estudiar si son diagonalizables. En caso afirmativo, hallar la forma diagonal, una base B de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores y la matriz de paso de B a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

CONTINÚA AL DORSO
$\longrightarrow\longrightarrow$
$\longrightarrow\longrightarrow$
$\longrightarrow\longrightarrow$

4. Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x+y=0 \\ x+2y+z=0 \end{array} \right\}$, se pide:

   (a) (**0.7 puntos**) Obtener el subespacio complemento ortogonal de S, $S^\perp$, y dar una base ortonormal de $S^\perp$.

   (b) (**0.7 puntos**) Obtener la matriz asociada a la proyección ortogonal sobre el subespacio S, $P_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

   (c) (**0.6 puntos**) Dado el vector $\bar{u} = (1,5,1)$, calcular la distancia entre el vector $\bar{u}$ y el subespacio S.

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de manera que, siendo $B_C = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es

$$f(\bar{e_1}) = \frac{1}{3}\bar{e_1} - \frac{2}{3}\bar{e_2} - \frac{2}{3}\bar{e_3}, \quad f(\bar{e_2}) = -\frac{2}{3}\bar{e_1} + \frac{1}{3}\bar{e_2} - \frac{2}{3}\bar{e_3}, \quad f(\bar{e_3}) = \frac{b}{3}\bar{e_1} - \frac{2}{3}\bar{e_2} + \frac{1}{3}\bar{e_3},$$

   se pide:

   (a) (**1 punto**) Calcular el valor de b de manera que f sea una aplicación ortogonal.

   (b) (**1 punto**) Para el valor de b obtenido en el apartado (a), hallar la matriz de f con respecto a la base canónica $M(f, B_C)$ y deducir de ella si conserva o cambia la orientación.

Conv. Extraordinaria
8 de Julio de 2014

ÁLGEBRA LINEAL

Tiempo 2h.

Apellidos:
Nombre:

1. Se consideran los subespacios S y T de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

   S es el subespacio generado por el conjunto de vectores $\{(1,0,2,-1),(1,1,3,0),(0,1,1,1)\}$,

   T es el subespacio definido por las ecuaciones implícitas $\begin{cases} 3x-3y+z-t=0 \\ x-y+t=0 \\ x-y+z-3t=0. \end{cases}$

   (a) (**0.5 puntos**) Averiguar si el vector $(1,2,4,1)$ pertenece al subespacio S.

   (b) (**0.5 puntos**) Hallar las dimensiones de los subespacios S y T.

   (c) (**0.5 puntos**) Hallar una base y la dimensión del subespacio $S\cap T$.

   (d) (**0.5 puntos**) Halla la dimensión del subespacio $S+T$.

   Solución.

   (a) $(1,2,4,1)\in S$.

   (b) $\dim(S)=2$ y $\dim(T)=2$.

   (c) $B_{S\cap T}=\{(1,2,-4,1)\}$ y $\dim(S\cap T)=1$.

   (d) $\dim(S+T)=3$.

   □

2. (**2 puntos**) Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que $\forall(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$f(x,y,z,t)=(x+2y+t,y-z+2t,x+4y-2z+5t).$$

   Hallar las ecuaciones implícitas y paramétricas de la Imagen y del Núcleo de f, explicando por qué razón se verifica que dim(Im(f)) + dim(Ker(f))=4.

   Solución.

   Para Im(f), $\begin{cases} x=\lambda+2\mu \\ y=\mu \\ z=\lambda+4\mu \end{cases}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, son sus ecuaciones paramétricas y $x+2y-z=0$ es su ecuación implícita. Se verifica que dim(Im(f))=2.

   Para Ker(f), $\begin{cases} x=-2\lambda+3\mu \\ y=\lambda-2\mu \\ z=\lambda \\ t=\mu \end{cases}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, son sus ecuaciones paramétricas y $\begin{cases} x+2y+t=0 \\ y-z+2t=0 \end{cases}$ son las ecuaciones implícitas. Se tiene que dim(Ker(f))=2. □

3. (**2 puntos**) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, estudiar si son diagonalizables. En caso afirmativo, hallar la forma diagonal, una base B de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores y la matriz de paso de B a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución. La matriz A es diagonalizable, siendo su forma diagonal $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, una base formada por autovectores $B = \{(-1, 1, 0), (2, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ y la matriz de paso de B a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz B no es diagonalizable. $\square$

4. Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array} \right\}$, se pide:

(a) (**0.7 puntos**) Obtener el subespacio complemento ortogonal de S, $S^\perp$, y dar una base ortonormal de $S^\perp$.

(b) (**0.7 puntos**) Obtener la matriz asociada a la proyección ortogonal sobre el subespacio S, $P_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^3$.

(c) (**0.6 puntos**) Dado el vector $\bar{u} = (1, 5, 1)$, calcular la distancia entre el vector $\bar{u}$ y el subespacio S.

Solución.

(a) El complemento ortogonal de S es el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$ y una base ortonormal es $B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 1,\ 2)\}$.

(b) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $d(\bar{u}, S) = 2\sqrt{6}$.

$\square$

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de manera que, siendo $B_C = \{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es

$$f(\bar{e_1}) = \frac{1}{3}\bar{e_1} - \frac{2}{3}\bar{e_2} - \frac{2}{3}\bar{e_3}, \quad f(\bar{e_2}) = -\frac{2}{3}\bar{e_1} + \frac{1}{3}\bar{e_2} - \frac{2}{3}\bar{e_3}, \quad f(\bar{e_3}) = \frac{b}{3}\bar{e_1} - \frac{2}{3}\bar{e_2} + \frac{1}{3}\bar{e_3},$$

se pide:

(a) (**1 punto**) Calcular el valor de b de manera que f sea una aplicación ortogonal.

(b) (**1 punto**) Para el valor de b obtenido en el apartado (a), hallar la matriz de f con respecto a la base canónica $M(f, B_C)$ y deducir de ella si conserva o cambia la orientación.

Solución.

(a) $b = -2$.

(b) $M(f, B_C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y la aplicación cambia la orientación.

$\square$